JURNAL MATEMATIKA "MANTIK"
Oktober 2018. Vol. 04 No. 02
ISSN: 2527-3159 E-ISSN: 2527-3167

SEBARANG PEMBANGUN SUBGRUP SIKLIK DARI SUATU GRUP $(\mathbf{Z}_n,+)$

Indra Bayu Muktyas[1] dan Samsul Arifin[2]
Program Studi Pendidikan Matematika - STKIP Surya[1,2]
indrabayu.muktyas@stkipsurya.ac.id[1], samsul.arifin@stkipsurya.ac.id[2]

DOI: https://doi.org/10.15642/mantik.2018.4.1.116-121

Abstrak

$(\mathbf{Z}_n,+)$ adalah grup himpunan bilangan bulat modulo *n* dengan suatu operasi penjumlahan modulo *n*. Suatu subgrup siklik adalah subgrup yang dibangun oleh satu buah elemen dari suatu grup. Pada grup $(\mathbf{Z}_n,+)$, sebarang subgrup siklik di dalamnya dapat ditentukan melalui pembangun yang merupakan faktor dari *n*. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan sebarang pembangun subgrup siklik dari suatu grup $(\mathbf{Z}_n,+)$ dengan menggunakan bantuan pemrograman Python. Hasil penelitian menunjukkan bahwa dengan menggunakan Python, untuk sebarang subgrup siklik, dapat ditentukan sebarang pembangunnya.

Kata kunci: *grup* $(\mathbf{Z}_n,+)$, *subgrup siklik, pembangun, Python*

Abstract

$(\mathbf{Z}_n,+)$ is a group of the integer modulo n with an addition operation. A cyclic subgroup is a subgroup that is generated by one element of a group. In group $(\mathbf{Z}_n,+)$, any cyclic subgroup can be determined through a generator which is a factor of n. The aim of this article is to get all generator of the cyclic subgroup of a group $(\mathbf{Z}_n,+)$ using Python. The result of our study shows that by using Python, for any cyclic subgroup of $(\mathbf{Z}_n,+)$, we can get all their generator.

Keywords: group $(\mathbf{Z}_n,+)$, cyclic subgroup, generator, Python

1. Pendahuluan

Suatu grup adalah himpunan *G* dengan operasi biner *, sedemikian hingga berlaku tertutup, asosiatif, terdapat elemen identitas dan setiap elemen memiliki invers. Jika suatu grup memiliki sifat $a*b=b*a$,untuk setiap elemen *a* dan *b*, maka dikatakan bahwa grup tersebut komutatif. Sifat-sifat dasar mengenai grup dapat dipelajari di [1], [3] dan [5]. Grup Siklik adalah suatu grup yang setiap elemennya dapat ditulis sebagai perpangkatan dari setiap unsur tetap pada grup tersebut. Karakteristik dari grup siklik dapat dilihat di [4], [7] dan [8].

Subgrup adalah subhimpunan *H* di dalam grup *G* yang juga merupakan grup dengan operasi yang sama di *G*. Untuk suatu *a* elemen grup *G*, dapat dibentuk subhimpunan *S* berisi semua elemen *G* yang merupakan hasil perpangkatan dari elemen *a*. Subhimpunan *S* tersebut membentuk subgroup di *G*, dan disebut subgroup siklik yang dibangun oleh *a*. Ingat bahwa setiap grup siklik adalah grup komutatif dan subgrup dari suatu grup siklik juga siklik.

Himpunan semua bilangan bulat modulo *n*, dinotasikan dengan $\mathbf{Z}_n$, adalah suatu grup terhadap operasi penjumlahan modulo. Grup ini sangat penting dalam mempelajari teori grup, karena banyak konsep dalam teori grup yang menggunakannya sebagai contoh. Grup $(\mathbf{Z}_n,+)$ dikonstruksi dengan menggunakan algoritma

ISSN: 2527-3159 E-ISSN: 2527-3167

pembagian pada himpunan semua bilangan bulat $\mathbf{Z}$. Proses pembentukan $\mathbf{Z}_n$ ini dapat dipelajari di [2].

Python adalah bahasa pemrograman yang multiguna dan mudah untuk dipelajari. Python juga dapat berjalan di berbagai platform system operasi, seperti Windows (lihat [9]), Linux, Mac OS, Android (lihat [10]), dan lain lain. Dalam tulisan ini akan dikaji penentuan semua subgroup siklik dari grup $(\mathbf{Z}_n,+)$ dengan menggunakan bantuan pemrograman Python.

2. Tinjauan Pustaka

2.1. Pengertian Grup $\mathbf{Z}_n$

Di sesi ini akan dikaji mengenai konstruksi dari grup $(\mathbf{Z}_n,+)$. Dalam tulisan ini diasumsikan bahwa semua grup bersifat komutatif. Berikut diberikan pengertian dari grup.

Definisi 2.1. Fraleigh [1]. *Diberikan himpunan tidak kosong G yang dilengkapi dengan operasi “* ”. Himpunan G disebut grup terhadap operasi “* ” jika memenuhi empat aksioma berikut ini:*

1. $(\forall a,b\in G)\, a*b\in G$
2. $(\forall a,b,c\in G)(a*b)*c=a*(b*c)$
3. $(\exists e\in G)(\forall a\in G)\, a*e=e*a=a$
4. $(\forall a\in G)(\exists a^{-1}\in G)\, a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$

Dalam [7], telah dibuktikan bahwa elemen identitas dan elemen invers dari suatu grup adalah tunggal, berlaku sifat kanselasi dan berlaku sifat *Socks-Shoes*. Selanjutnya akan diberikan pengertian mengenai suatu grup khusus yang sangat penting dalam mempelajari teori grup, sebab banyak konsep dalam teori grup yang menggunakannya sebagai contoh. Grup tersebut dikonstruksi menggunakan algoritma pembagian pada himpunan semua bilangan bulat $\mathbf{Z}$.

Diberikan suatu $a\in\mathbf{Z}$ dan bilangan bulat positif $n\in\mathbf{Z}$. Dengan menggunakan algoritma pembagian pada bilangan bulat, maka terdapat dengan tunggal $q,r\in\mathbf{Z}$ sedemikian hingga berlaku $a=qn+r$ dengan $0\le r\le n-1$. Bilangan bulat q disebut dengan hasil bagi (quotient) dan bilangan bulat r disebut dengan sisa (residu). Sisa pembagian r dinotasikan dengan $r=a \bmod n$. Selanjutnya, diperkenalkan konsep mengenai kongruensi pada bilangan bulat sebagai berikut. Misalkan diberikan bilangan bulat $a,b\in\mathbf{Z}$ dan bilangan bulat positif $n\in\mathbf{Z}$. Bilangan bulat a dikatakan kongruen b modulo n jika n membagi habis $a-b$, ditulis dengan $a\equiv b\pmod n$. Dapat dibuktikan bahwa kongruensi modulo n merupakan relasi ekuivalensi. Akibatnya, pada $\mathbf{Z}$ terpecah menjadi kelas-kelas yang saling asing. Untuk suatu $a\in\mathbf{Z}$, dapat dibentuk kelas yang memuat a, yaitu $\bar{a}=\{x\in\mathbf{Z}\mid x\equiv a\pmod n\}$. Secara umum, jika diberikan bilangan bulat positif $n\in\mathbf{Z}$, maka relasi ekuivalensi kongruen modulo n mempunyai n partisi yang saling asing pada $\mathbf{Z}$, yaitu $\bar{0}$, $\bar{1}$, $\bar{2}$, ..., dan $\overline{n-1}$.

Dibentuk $\mathbf{Z}_n$ adalah himpunan semua kelas yang didapatkan dari relasi ekuivalensi kongruen modulo n, yaitu $\mathbf{Z}_n=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},...,\overline{n-1}\}$. Pada himpunan $\mathbf{Z}_n$ didefinisikan operasi penjumlahan “+”, yaitu untuk setiap $\bar{a},\bar{b}\in\mathbf{Z}_n$ didefinisikan $\bar{a}+\bar{b}:=\overline{a+b}$. Dapat ditunjukkan bahwa $(\mathbf{Z}_n,+)$ merupakan grup komutatif komutatif dengan elemen identitasnya adalah $\bar{0}\in\mathbf{Z}_n$.

2.2. Pengertian Subgrup Siklik

Dalam sesi ini akan dikaji mengenai subgrup siklik. Berikut adalah definisi dari grup siklik dan pembangun dari suatu grup.

Definisi 2.1. Adkins [6].
Suatu grup $(G,*)$ disebut grup siklik jika terdapat $g\in G$ sedemikian hingga untuk setiap $a\in G$ dapat dinyatakan sebagai $a=g^n$, untuk suatu $n\in$. Elemen $g\in G$ tersebut dinamakan dengan elemen pembangun atau

ISSN: 2527-3159 E-ISSN: 2527-3167

generator dari G, dan G dikatakan grup siklik yang dibangun oleh g, dinotasikan dengan $G = \langle g \rangle$.

Dari definisi grup siklik di atas, dapat dilihat bahwa grup siklik *G* yang dibangun oleh $g \in G$, yaitu $G = \langle g \rangle$ dapat dinyatakan sebagai $\langle g \rangle = \{ g^n \mid n \in \mathbf{Z} \}$. Lebih lanjut, setiap grup siklik adalah grup komutatif (lihat[1]). Perhatikan contoh berikut. Grup $(\mathbf{Z}_{72}, +)$ merupakan grup siklik yang dibangun oleh $1 \in \mathbf{Z}_{72}$, yaitu $\mathbf{Z}_{72} = \langle 1 \rangle$. Di lain pihak, grup $(\mathbf{Z}_{72}, +)$ ternyata juga dibangun oleh $11 \in \mathbf{Z}_{72}$, yaitu $\mathbf{Z}_{72} = \langle 11 \rangle$.

Misalkan diberikan grup $(G, *)$ dan himpunan bagian tidak kosong $H \subseteq G$. Ingat bahwa himpunan *H* disebut subgrup dari *G* jika *H* juga merupakan grup terhadap operasi biner "*" yang sama pada grup *G*, dinotasikan dengan $H \leq G$.(lihat [3]). Rotman menjelaskan dalam [4] bahwa suatu subhimpunan dari suatu grup dapat diuji apakah merupakan subgroup atau bukan, yaitu misalkan diberikan grup $(G, *)$ dan *H* suatu subhimpunan tidak kosong dari *G*, maka *H* subgrup dari *G* jika dan hanya jika $(\forall a, b \in H)\, a * b^{-1} \in H$. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa untuk suatu elemen $g \in G$, dapat dibentuk subhimpunan yang dibangun oleh *g* dan membentuk subgrup di *G*.

Teorema 2.2. Dummit [2].
Diberikan grup G dan $g \in G$, *maka* $\langle g \rangle = \{ g^n \mid n \in \square \}$ *merupakan subgrup dari G. Selanjutnya,* $\langle g \rangle$ *disebut dengan* ***subgrup siklik*** *dari G yang dibangun oleh g.*

Bukti: Jelas bahwa $\langle g \rangle \subseteq G$ dan $\langle g \rangle$ tidak kosong, sebab $g^0 = e \in \langle g \rangle$. Selanjutnya diambil sebarang $a, b \in \langle g \rangle$, maka $a = g^m$ dan $b = g^n$, untuk suatu $m, n \in \mathbf{Z}$, sehingga $m - n \in \mathbf{Z}$. Selanjutnya, perhatikan bahwa $ab^{-1} = g^m (g^n)^{-1} = g^m g^{-n} = g^{m-n} \in \langle g \rangle$. Dengan demikian, terbukti bahwa $\langle g \rangle$ subgrup dari *G*.

Ingat bahwa order suatu subgrup adalah banyaknya elemen dari subgrup tersebut. Perhatikan contoh berikut.

Contoh 2.3.
Diberikan grup $\mathbf{Z}_{106} = \{0, 1, 2, ..., 105\}$ *terhadap operasi penjumlahan modulo 106. Himpunan* $S = \{0, 2, ..., 104\}$ *adalah subgrup dari* $(\mathbf{Z}_{106}, +)$ *yang dibangun oleh* $2 \in \mathbf{Z}_{106}$ *dengan order 53.*

Misalkan diberikan sebarang $n, k \in \mathbf{Z}$. Perhatikan bahwa $FPB(n, k) = 1$ bermakna bahwa faktor persekutuan terbesar antara bilangan *n* dan *k* adalah 1. Berikut adalah lemma yang mengatakan bahwa pembangun dari grup $\mathbf{Z}_n$ adalah bilangan *k* sedemikian hingga berlaku $FPB(n, k) = 1$, serta subgrup-subgrup di grup $\mathbf{Z}_n$ adalah subhimpunan yang dibangun oleh faktor-faktor dari *n*.

Lemma 2.4. Gallian [7].

a) *Suatu* $k \in \mathbf{Z}_n$ *adalah pembangun dari* $\mathbf{Z}_n$ *jika dan hanya jika* $FPB(n, k) = 1$.
b) *Di grup* $\mathbf{Z}_n$, *untuk setiap pembagi positif* k *dari* n, *himpunan* $\left\langle \frac{n}{k} \right\rangle$ *adalah subgrup tunggal di* $\mathbf{Z}_n$ *dengan order k. Lebih lanjut, hanya* $\left\langle \frac{n}{k} \right\rangle$ *subgrup-subgrup di* $\mathbf{Z}_n$.

Lemma tersebut menjamin bahwa semua subgroup siklik di grup $\mathbf{Z}_n$ adalah subhimpunan yang dibangun oleh semua faktor dari *n*. Hal ini yang akan menjadi dasar dari penentuan semua

ISSN: 2527-3159 E-ISSN: 2527-3167

subgrup siklik di pemrograman menggunakan Python. Perhatikan contoh berikut.

Contoh 2.5.

Misalkan diberikan grup $\mathbf{Z}_{70} = \{0,1,2,...,69\}$. *Ingat bahwa faktor dari n adalah {1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70}, sehingga diperoleh subgrup-subgrup di* $(\mathbf{Z}_{70},+)$ *adalah:*

$\langle 1\rangle = \{0,1,...,69\}$ *order* 70

$\langle 2\rangle = \{0,2,...,68\}$ *order* 35

$\langle 5\rangle = \{0,5,...,65\}$ *order* 14

$\langle 7\rangle = \{0,7,...,63\}$ *order* 10

$\langle 10\rangle = \{0,10,...,60\}$ *order* 7

$\langle 14\rangle = \{0,14,...,56\}$ *order* 5

$\langle 35\rangle = \{0,35\}$ *order* 70

$\langle 70\rangle = \{0\}$ *order* 70

Elemen pembangun suatu subgrup siklik tidak tunggal. Perhatikan kembali contoh berikut. Misalkan diberikan grup $(\mathbf{Z}_{100},+)$. Subgrup siklik yang dibangun oleh $10 \in \mathbf{Z}_{100}$ adalah $\langle 10\rangle = \{10^n \mid n \in \mathbf{Z}\} = \{0,10,20,...,90\}$.

Subgrup siklik yang dibangun oleh $11 \in \mathbf{Z}_{100}$ adalah sebagai berikut, $\langle 11\rangle = \{11^n \mid n \in \mathbf{Z}\} =$ $\{11^0 = 0, 11^1 = 11, 11^2 = 22, 11^3 = 33, ...\} = \{0,1,2,...,99\} = \mathbf{Z}_{100}$.

Dapat dilihat bahwa $\langle 11\rangle = \mathbf{Z}_{100}$, yaitu $11 \in \mathbf{Z}_{100}$ merupakan elemen pembangun dari grup siklik $(\mathbf{Z}_{100},+)$. Di lain pihak grup $(\mathbf{Z}_{100},+)$ juga dibangun oleh 1, yaitu $\mathbf{Z}_{100} = \langle 1\rangle$.

3. Metodologi Penelitian

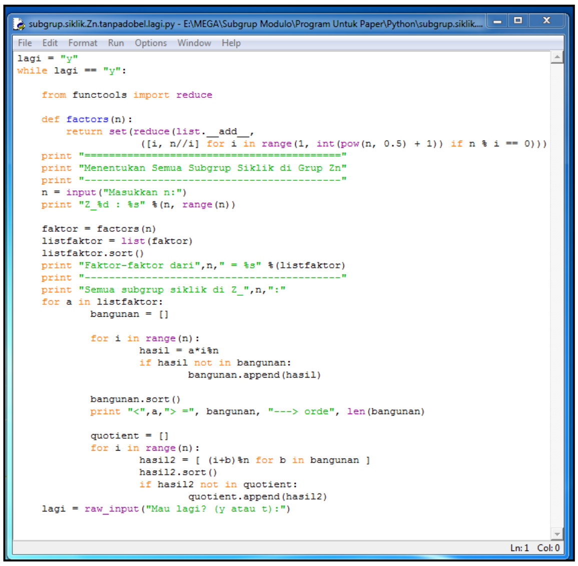
3.1. Python

Dalam sesi ini akan dikaji pemrograman dalam menentukan semua subgroup siklik dari grup $\mathbf{Z}_n$ dengan menggunakan Python 2.7.14, yang merupakan hasil utama dari tulisan ini. Hal-hal yang menjadi dasar dalam pembuatan program adalah Lemma 3.4. di atas. Berikut adalah tampilan pemrograman yang digunakan dalam tulisan ini.

```
lagi = "y"
while lagi == "y":

    from functools import reduce

    def factors(n):
        return set(reduce(list.__add__,
                ([i, n//i] for i in range(1, int(pow(n,
0.5) + 1)) if n % i == 0)))
    print
"=================================
========="
    print "Menentukan Semua Subgrup Siklik di
Grup Zn"
    n = input("Masukkan n:")
    print "Z_%d : %s" %(n, range(n))

    faktor = factors(n)
    listfaktor = list(faktor)
    listfaktor.sort()
    print "Faktor-faktor dari",n," = %s"
%(listfaktor)

    print "----------------------------------------"
    print "Semua subgrup siklik di Z_",n,":"
    for a in listfaktor:
        bangunan = []

        for i in range(n):
            hasil = a*i%n
            if hasil not in bangunan:
                bangunan.append(hasil)

        bangunan.sort()
        print "<",a,"> =", bangunan, ", --->
orde", len(bangunan)

        quotient = []
        for i in range(n):
            hasil2 = [ (i+b)%n for b in
bangunan ]
            hasil2.sort()
            if hasil2 not in quotient:
                quotient.append(hasil2)
    lagi = raw_input("Mau lagi? (y atau t):")
```

Berikut adalah tampilan program menggunakan Python. dan contoh keluaran dari program di atas, yaitu untuk grup $(\mathbf{Z}_{72},+)$ dan $(\mathbf{Z}_{108},+)$ untuk versi OS Windows.

JURNAL MATEMATIKA "MANTIK"
Oktober 2018. Vol. 04 No. 02
ISSN: 2527-3159 E-ISSN: 2527-3167




```
lagi = "y"
while lagi == "y":

    from functools import reduce

    def factors(n):
        return set(reduce(list.__add__,
                    ([i, n//i] for i in range(1, int(pow(n, 0.5) + 1)) if n % i == 0)))
    print "========================================"
    print "Menentukan Semua Subgrup Siklik di Grup Zn"
    print "----------------------------------------"
    n = input("Masukkan n:")
    print "Z_%d : %s" %(n, range(n))

    faktor = factors(n)
    listfaktor = list(faktor)
    listfaktor.sort()
    print "Faktor-faktor dari",n," = %s" %(listfaktor)
    print "----------------------------------------"
    print "Semua subgrup siklik di Z_",n,":"
    for a in listfaktor:
            bangunan = []

            for i in range(n):
                    hasil = a*i%n
                    if hasil not in bangunan:
                            bangunan.append(hasil)

            bangunan.sort()
            print "<",a,"> =", bangunan, "---> orde", len(bangunan)

            quotient = []
            for i in range(n):
                    hasil2 = [ (i+b)%n for b in bangunan ]
                    hasil2.sort()
                    if hasil2 not in quotient:
                            quotient.append(hasil2)
    lagi = raw_input("Mau lagi? (y atau t):")
```

4. Hasil

Berikut adalah tampilan program menggunakan Python. dan contoh keluaran dari program di atas, yaitu untuk grup

$(\mathbf{Z}_{72},+)$ dan $(\mathbf{Z}_{108},+)$ untuk versi OS Windows. Tampilan keluaran berikut akan menutup sesi ini.

a) Untuk grup $(\mathbf{Z}_{72},+)$

```
===================================
========
Menentukan Semua Subgrup Siklik di Grup Zn
----------------------------------------
Masukkan n:72
Z_72 : [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71]
Faktor-faktor dari 72  = [1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72]
----------------------------------------
Semua subgrup siklik di Z_ 72 :
< 1 > = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71] ---> orde 72
< 2 > = [0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 52, 54, 56, 58, 60, 62, 64, 66, 68, 70] ---> orde 36
< 3 > = [0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60, 63, 66, 69] ---> orde 24
< 4 > = [0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, 64, 68] ---> orde 18
< 6 > = [0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66] ---> orde 12
< 8 > = [0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64] ---> orde 9
< 9 > = [0, 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63] ---> orde 8
< 12 > = [0, 12, 24, 36, 48, 60] ---> orde 6
< 18 > = [0, 18, 36, 54] ---> orde 4
< 24 > = [0, 24, 48] ---> orde 3
< 36 > = [0, 36] ---> orde 2
< 72 > = [0] ---> orde 1
Mau lagi? (y atau t):
```

b) Untuk grup $(\mathbf{Z}_{108},+)$

```
===================================
========
Menentukan Semua Subgrup Siklik di Grup Zn
----------------------------------------
Masukkan n:72
Z_72 : [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71]
===================================
========
Menentukan Semua Subgrup Siklik di Grup Zn
----------------------------------------
Masukkan n:108
Z_108 : [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107]
Faktor-faktor dari 108  = [1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 54, 108]
----------------------------------------
Semua subgrup siklik di Z_ 108 :
```

JURNAL MATEMATIKA “MANTIK”
Oktober 2018. Vol. 04 No. 02
ISSN: 2527-3159 **E-ISSN: 2527-3167**

```
< 1 > = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13,
14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26,
27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39,
40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52,
53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65,
66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78,
79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91,
92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102,
103, 104, 105, 106, 107] ---> orde 108
< 2 > = [0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22,
24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48,
50, 52, 54, 56, 58, 60, 62, 64, 66, 68, 70, 72, 74,
76, 78, 80, 82, 84, 86, 88, 90, 92, 94, 96, 98,
100, 102, 104, 106] ---> orde 54
< 3 > = [0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33,
36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60, 63, 66, 69, 72,
75, 78, 81, 84, 87, 90, 93, 96, 99, 102, 105] --->
orde 36
< 4 > = [0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40,
44, 48, 52, 56, 60, 64, 68, 72, 76, 80, 84, 88, 92,
96, 100, 104] ---> orde 27
< 6 > = [0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60,
66, 72, 78, 84, 90, 96, 102] ---> orde 18
< 9 > = [0, 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90,
99] ---> orde 12
< 12 > = [0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96] --->
orde 9
< 18 > = [0, 18, 36, 54, 72, 90] ---> orde 6
< 27 > = [0, 27, 54, 81] ---> orde 4
< 36 > = [0, 36, 72] ---> orde 3
< 54 > = [0, 54] ---> orde 2
< 108 > = [0] ---> orde 1
Mau lagi? (y atau t):
```

Referensi

[1] A First Course in Abstract Algebra, Sixth Edition, John B. Fraleigh, Addison-Wesley, New York, 2000

[2] Abstract Algebra, 3rd Edition, David S. Dummit, 2004

[3] Abstract Algebra, 3rd Edition, Herstein I., Prenntice, 1996

[4] Advanced Modern Algebra, Rotman, J. J., Prentice Hall, New York, 2003

[5] Algebra, A Graduate Course, I. Martin Isaacs, 1994

[6] Algebra: An Approach Via Module Theory, Adkins Weintraub, 1992

[7] Contemporary Abstract Algebra, 9th Edition, J.A.Gallian, USA, 2017

[8] Fundamentals of Abstract Algebra, D.S. Malik, John N. Moderson and M.K. Sen, USA, 1997

[9] Python. (2018, 30 April) https://www.python.org/

[10] Google. (2018, 30 April) https://play.google.com/store/apps/details?id=org.qpython.qpy&hl=en